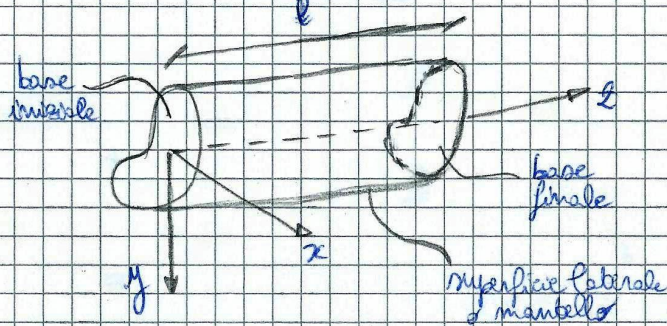


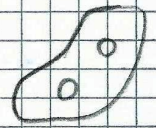
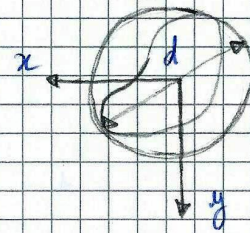
Il problema elastico di de Saint-Venant

Il problema della trave continua trova un'interpretazione microscopica nel problema elastico di de Saint-Venant:



COMPATTA O TONO CONNESSA

PURAMENTE CONNESSA



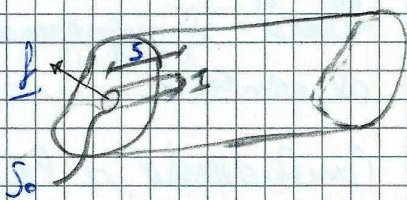
d è il diametro del cerchio di raggio minimo che circonda la sezione. Consideriamo continui tali che $d \ll l$ e z è l'asse della "trave" microscopica bidimensionale. x e y sono assi principali d'inertia.

Il cilindro a base qualsiasi considerato è:

- omogeneo isotropo,
- sollecitato solo sulle basi;
- libero cioè senza vincoli.

In effetti allora la trave vincolata e caricata non si sposta il modello. Possiamo allora far rientrare, con qualche accorgimento, i casi trattati nelle ipotesi del modello. Facciamo alcune osservazioni:

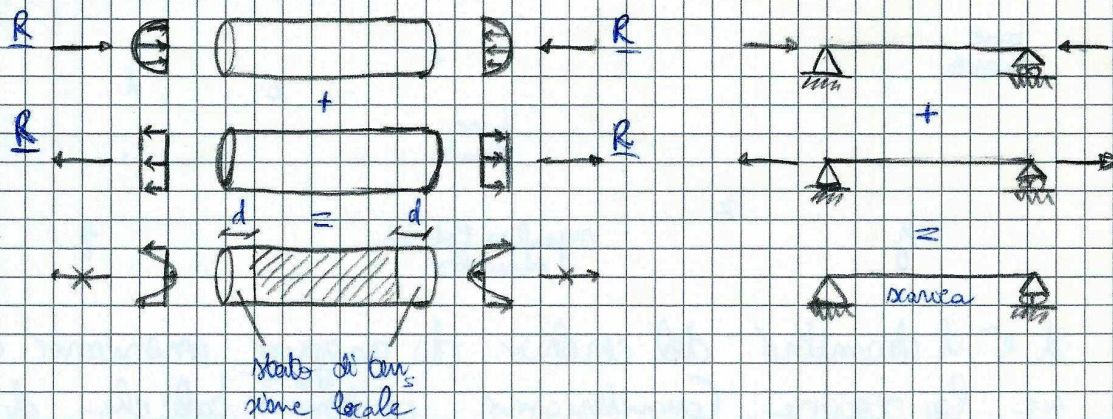
- carichi concentrati. Introduciamo il principio di de Saint-Venant: "Se sostituiamo le forze superficiali su S_0 con una distribuzione staticamente equivalente (risultante delle forze e loro momento uguali tra i due sistemi) gli effetti sul campo di tensione/deformazione sono trascurabili ad una distanza grande in rapporto alla massima dimensione di S_0 ".



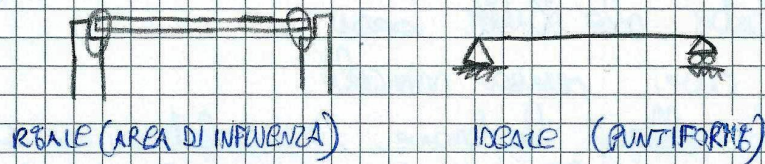
Esiste allora un volumetto del corpo in cui si estinguono gli effetti locali del carico (volume di estinzione). Quindi sistemi di forze staticamente equivalenti

producono stato di tensione uguale ad eccezione di una zona ristretta prossima all'area di carico. In parti,

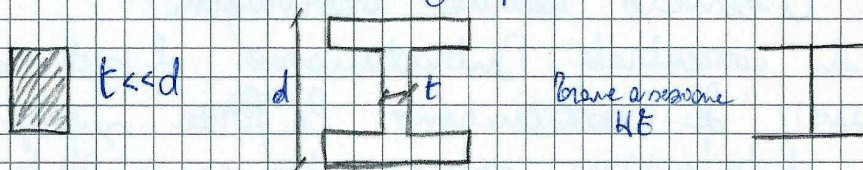
colore, e i sistemi di forze sono autoequilibrati ($R=0, M=0$), essi inducono sul corpo uno stato di tensione praticamente nullo (il corpo è scarico nella maggior parte della sua lunghezza). Schematicamente:



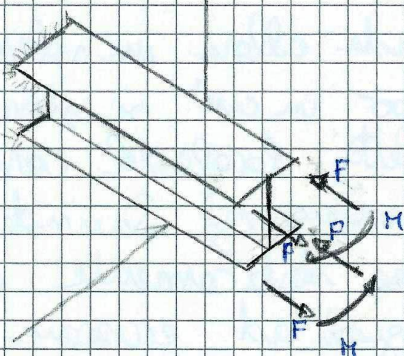
Vicino ai vincoli il cilindro risente delle forze, nella parte centrale no! Ecco il legame tra modello e trave, evidente anche se si considera la trave reale, senza l'approssimazione di forze puntiformi:



Il principio di equivalenza elastica cade in difetto nel caso di travi con sezioni "rotte" (in parete rotte):



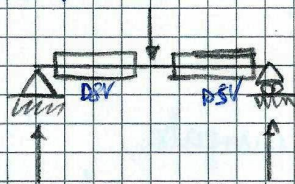
Le travi di thin-walled beams, per cui l'effetto di esborzamento locale non vale più. Un esempio è la torsione, che è di tipo DSV solo per travi compatte e uniformi:



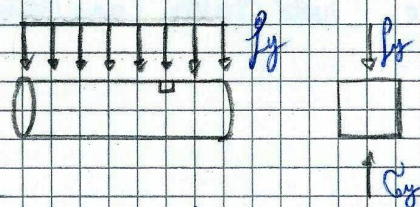
Gli effetti locali all'estremo libero si propagano fino al vincolo.

Concludendo, se la trave è snella e compatta, gli effetti dei vincoli dei carichi puntuali sono solo locali.

Si può applicare DSV:



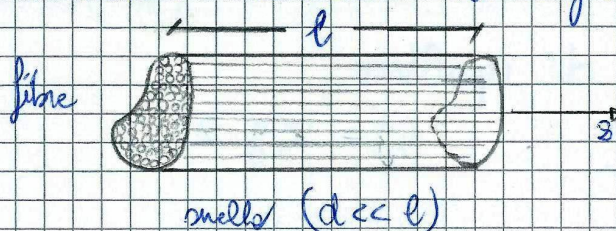
- carichi distribuiti: gli effetti non possono più essere localizzati, sono globali. Localmente tuttavia gli effetti sono piccoli rispetto alla capacità di sopportazione del materiale.



$$f_y < 10 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \quad \text{(carichi permanenti raramente)}$$

$$10 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} = 10000 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} = \frac{10^5}{10^6} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 0.1 \text{ MPa}$$

L'acciaio sopporta 120-160 MPa, il calcestruzzo (C25) 25-30 MPa. Considerando le travi come fascio di fibre:



Si considerano gli effetti globali come prevalenti nella direzione z (lunghezza). Si trascurano gli effetti locali nelle direzioni x e y.

Così gli scambi laterali tra le fibre. Per questo il tensore della tensione alla DSV è:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

L'ipotesi che rende tale il tensore dà già una traccia di soluzione. Oltre ai due metodi, diretti (da f, l a (μ, ϵ, σ)) e inverso (da (μ, ϵ, σ) a f, l), esiste quello semi-inverso. Esso coincide proprio nell'approccio DSV.

Nell'ambito della "teoria lineare delle travi", i risultati del modello DSV si considerano validi anche per:

- travi rettilinee;
- carichi concentrati e distribuiti in campata;
- travi ad asse debolmente curvilineo e spesso;
- travi eterogenee e non isotrope (come quelle in CLS e legno).

Qualunque sia la natura delle forze esterne (grandezze globali, macro), lo stato di tensione e deformazione del modello DSV (grandezze locali, micro) dipende solo dalle caratteristiche di sollecitazione.

La tensione nel modello DSV

Introduciamo qualche equazione:

$$f = 0 \quad b = 0 \text{ su } S_e$$

$f \neq 0$ sulle basi



Per le equazioni indefinite di equilibrio:

$$\sum_j \sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad i,j = x, y, z$$

In forma differenziale, su V :

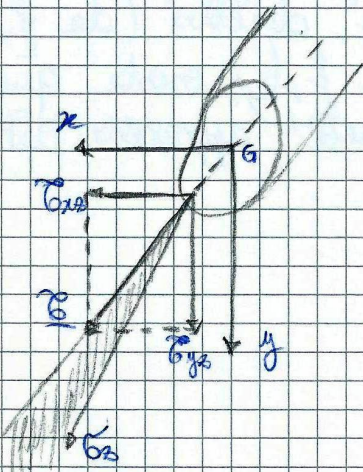
$$i=x \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \frac{b_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow \sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x,y)$$

$$i=y \quad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \frac{b_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x,y)$$

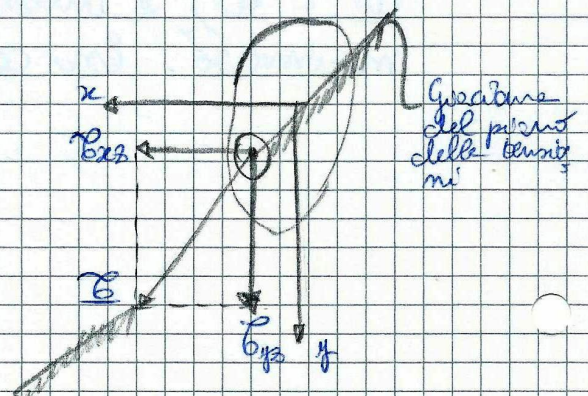
$$i=z \quad \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{b_z}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} = 0$$

Essendo det $\Pi = 0$, $\sigma_z = 0$, lo stato di tensione è biassiale. Cerchiamo allora il piano delle tensioni:



σ_x e σ_y individuano il piano delle tensioni.

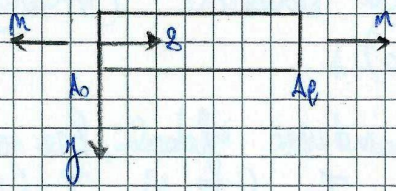


○ incisa, $\sigma > 0$

Consideriamo ora la superficie laterale (o mantello, con $f=0$)
 per studiare l'equilibrio sul contorno. Otteniamo $\underline{T} \cdot \underline{n} = \underline{f}$ su $\underline{f}$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{zz} \\ 0 & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0=0 \\ 0=0 \\ \sigma_{zx} m_x + \sigma_{zy} m_y = 0 \end{cases}$$

Dall'ultima equazione si ha $\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = 0 \Rightarrow \underline{\sigma} \perp \underline{n}$, cioè $\underline{\sigma}$ è tangente al contorno. Sulla base invece:



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{zz} \\ 0 & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x^0 \\ f_y^0 \\ f_z^0 \end{pmatrix} \quad \text{su } A_0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{zz} \\ 0 & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x^l \\ f_y^l \\ f_z^l \end{pmatrix} \quad \text{su } A_l$$

Otteniamo due sistemi:

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{zx} = -f_x^0 \\ \sigma_{yz} = -f_y^0 \\ \sigma_z = -f_z^0 \end{cases} \quad \text{su } A_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{zx} = f_x^l \\ \sigma_{yz} = f_y^l \\ \sigma_z = f_z^l \end{cases} \quad \text{su } A_l$$

Le componenti di tensione (non nulle) sono uguali alle corrispondenti componenti del carico superficiale agente sulle basi.

Ricordiamo, prima di procedere, le equazioni di legame inverse:

$$\epsilon_x = -\frac{1}{E} \sigma_z$$

$$\epsilon_y = -\frac{1}{E} \sigma_z$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\gamma_{xy} = 0$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\sigma_{zx}}{G}$$

di congruenza implicite:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{E} \sigma_z$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{E} \sigma_z$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\sigma_{yz}}{G}$$

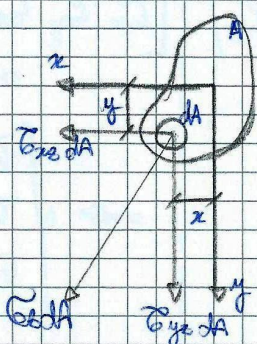
$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\sigma_{zx}}{G}$$

Tensione micro e sollecitazione macro

Il modello di DSK è libero e con carichi solo sulle basi.

Nella nostra analisi consideriamo:

- le risultanti delle forze sulle basi ($d \ll l$) e non le forze puntuali;
 - lo stato di tensione e deformazione di una trave completamente definito in funzione delle caratteristiche globali qualsiasi siano le forze agenti (ad esempio N, T, M) nonostante il modello sia apparentemente diverso dalle travi tecniche.
- Leghiamo a questo punto lo stato di tensione (micro) alle caratteristiche di sollecitazione (macro):

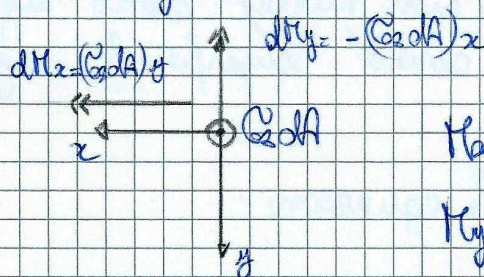


Otteniamo tre grandezze globali, che sono:

$$N := \int_A \sigma_x dA \quad T_x := \int_A \sigma_{xy} dA \quad T_y := \int_A \sigma_{yx} dA$$

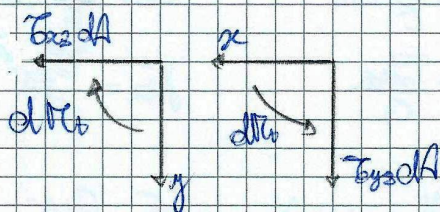
e la forza normale assiale, $\sigma_x dA$ la forza elementare

Per quanto riguarda i momenti (le altre tre grandezze):



$$M_x := \int_A dM_x = \int_A \sigma_x y dA \quad \text{momento flettente di asse } x$$

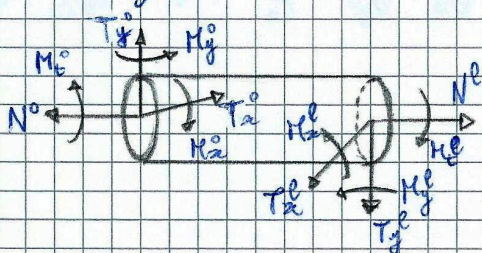
$$M_y := \int_A dM_y = \int_A \sigma_{xy} x dA \quad \text{momento flettente di asse } y$$



$$M_{tz} := M_{tx} := \int_A dM_t = \int_A (\sigma_{xy} x - \sigma_{yx} y) dA$$

momento torcente dato da due contributi

Otteniamo la relazione con le sollecitazioni agli estremi (riferite alle assi esterne):



CA TRASCINAZIONE

$$\begin{cases} N^0 = N^l = \text{cost} \\ T_x^0 = T_x^l = \text{cost} \\ T_y^0 = T_y^l = \text{cost} \end{cases} \quad \text{in } s$$

CA ROTAZIONE

$$\begin{cases} M_x^0 = M_x^l = \text{cost} \\ M_y^0 = M_y^l = \text{cost} \\ M_{tz}^0 = M_{tz}^l = \text{cost} \end{cases} \quad \text{in } s$$

Il problema viene suddiviso in quattro sottoproblemi più semplici di DSV:

- estensione uniforme: solo $N \Rightarrow$ solo $\bar{\sigma}_z$ costante sulla sezione, quindi:

- flessione uniforme: solo $M_x/M_y \Rightarrow$ solo $\bar{\sigma}_z$ variabile sulla sezione:

$$\underline{\bar{\sigma}} = \underline{0} \quad \underline{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma}_z \end{bmatrix}$$

- torsione uniforme: solo $M_t \Rightarrow \bar{\sigma}_z = 0$:

$$\underline{\bar{\sigma}} = \underline{0} \quad \underline{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{\sigma}_{xz} \\ 0 & 0 & \bar{\sigma}_{yz} \\ \bar{\sigma}_{zx} & \bar{\sigma}_{zy} & 0 \end{bmatrix}$$

- flessione non uniforme: T_y e M_x/M_x e $T_y \Rightarrow \bar{\sigma}_z \neq 0$

$$\underline{\bar{\sigma}} \neq \underline{0} \quad \underline{\Pi} \text{ DSV}$$

Se usa poi la sovrapposizione degli effetti e il problema alla DSV risulta composto dai vari problemi più semplici.

Nei casi di estensione e flessione uniformi vedremo soluzioni esatte, per la torsione uniforme soluzioni esatte e approssimate, per la flessione non uniforme soluzioni approssimate. Si dovranno studiare:

$$\bar{\sigma}_z = \bar{\sigma}_z(N, M_x, M_y) \quad \text{e} \quad \underline{\bar{\sigma}} = \underline{\bar{\sigma}}(\Pi_x, T_y, M_t)$$

Riprendendo le equazioni di compatibilità cinematica aggiungiamo la soluzione del problema di DSV per la tensione normale $\bar{\sigma}_z$:

$$\begin{aligned} \underline{\epsilon}^* &= \underline{0} \\ \text{esplicita} \end{aligned} \quad \begin{cases} \epsilon_{x,yy} + \epsilon_{y,xx} = \cancel{\gamma_{xy,xy}^{DSV}} \\ \epsilon_{y,zz} + \epsilon_{z,yy} = \cancel{\gamma_{yz,yz}^{DSV}} \\ \epsilon_{z,xx} + \epsilon_{x,zz} = \cancel{\gamma_{zx,zx}^{DSV}} \\ 2\epsilon_{x,yz} - \cancel{\gamma_{xy,zx}^{DSV}} - \cancel{\gamma_{xz,xy}^{DSV}} + \gamma_{yz,xz} = 0 \\ 2\epsilon_{y,xz} - \cancel{\gamma_{yz,xy}^{DSV}} - \cancel{\gamma_{xy,yz}^{DSV}} + \gamma_{xz,yy} = 0 \\ 2\epsilon_{z,xy} - \cancel{\gamma_{zx,xy}^{DSV}} - \cancel{\gamma_{xy,zx}^{DSV}} + \gamma_{yz,zz} = 0 \end{cases}$$

I termini con xy sono nulli nel modello di DSV. Inoltre, per il legame:

$$\bar{\sigma}_{xy} = 0 \Rightarrow \gamma_{xy,xy} = 0 \quad \bar{\sigma}_{xz,zz} = 0 \Rightarrow \gamma_{xz,zz} = 0 \quad \bar{\sigma}_{yz,zz} = 0 \Rightarrow \gamma_{yz,zz} = 0$$

$$\gamma = \bar{\sigma}/G$$

Facciamo una prova di trazione!



$$\epsilon_2 = G_2 / E$$

(Hooke)

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \frac{G_2}{E}$$

(Hooke generalizzata)

Le equazioni divengono:

$$\begin{cases} \epsilon_{2,yy} + \epsilon_{2,xx} = 0 \\ \epsilon_{2,zz} + \epsilon_{2,yy} = 0 \\ \epsilon_{2,xx} + \epsilon_{2,zz} = 0 \\ 2\epsilon_{2,xy} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\nu}{E} G_{2,yy} - \frac{\nu}{E} G_{2,xx} = 0 \\ -\frac{\nu}{E} G_{2,zz} + \frac{\nu}{E} G_{2,yy} = 0 \\ \frac{\nu}{E} G_{2,xx} - \frac{\nu}{E} G_{2,zz} = 0 \\ 2 \cdot \frac{1}{E} G_{2,xy} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} G_{2,xy} = 0 \\ \frac{1}{E} G_{2,zz} = \frac{1}{E} G_{2,xx} \\ -\frac{\nu}{E} G_{2,xx} + \frac{\nu}{E} G_{2,yy} = 0 \\ -\frac{\nu}{E} G_{2,yy} - \frac{\nu}{E} G_{2,xx} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} G_{2,xy} = 0 \\ G_{2,yy} = G_{2,xx} \\ -\frac{\nu}{E} G_{2,xx} - \frac{\nu}{E} G_{2,xx} = 0 \\ \frac{1}{E} G_{2,zz} = \frac{1}{E} G_{2,xx} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} G_{2,xy} = 0 \\ \epsilon_{2,xx} = 0 \\ G_{2,zz} = 0 \\ G_{2,yy} = 0 \end{cases}$$

Inoltre:

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{cases} G_{2,xx} + G_{2,yy} + G_{2,zz} = 0 \\ G_{2,xx} + G_{2,yy} + G_{2,zz} = 0 \end{cases}$$

La soluzione identicamente nulla del sistema ridotto a quattro equazioni ci dice che abbiamo linearità in x, y e z e costanza in xy . Otteniamo G_2 non contenente xy , mentre ci saranno x, y, z e i prodotti zx e zy . Quindi, in generale:

$$G_2 = a + a_1 x + a_2 y - z(b + b_1 x + b_2 y)$$

Forma bilineare. Possiamo determinare il valore delle costanti usando le relazioni tra tensioni e sollecitazioni. La soluzione è esatta.

Le due equazioni lasciate da parte e derivate rispetto a z governano i problemi nelle G .

Possiamo ora trovare la normale:

$$N = \int_A G_2 dA = \int_A [a + a_1 x + a_2 y - z(b + b_1 x + b_2 y)] dA$$

Con assi baricentrici si riduce a:

$$S_x := \int_A y dA$$

$$S_y := \int_A x dA$$

S_x e S_y sono i momenti lineari di area (statici). Allora:

$$aA + a_1 S_y + a_2 S_x - z(bA + b_1 S_y + b_2 S_x) = N$$

$$\Rightarrow N = A(a - zb) \Rightarrow N = \text{cost} = N^0 = N^e \Rightarrow a = N/A$$

Passando a M_x :

$$M_x = \int_A G_z y dA = \int_A [a_1 y + a_2 xy + a_3 y^2 - z(b_1 y + b_2 xy + b_3 y^2)] dA$$

Introduciamo gli integrali per gli assi principali di inerzia della sezione:

$$I_x := \int_A y^2 dA \quad I_{xy} := \int_A xy dA \quad I_y := \int_A x^2 dA$$

Si ottiene:

$$M_x = \underbrace{a_1}_{=0} I_x + a_2 I_{xy} + a_3 I_x - z \left(\underbrace{b_1}_{=0} I_x + b_2 I_{xy} + b_3 I_x \right) =$$

$$= \underbrace{(a_1 - b_1)}_{=0} I_x + a_2 I_{xy} - b_2 z I_x = I_x (a_2 - z b_2)$$

Per M_y :

$$M_y = - \int_A G_z x dA = - \int_A [a_1 x + a_2 x^2 + a_3 xy - z(b_1 x + b_2 x^2 + b_3 xy)] dA =$$

$$= - \left(\underbrace{a_1}_{=0} I_y + a_2 I_y + a_3 I_{xy} - z \left(\underbrace{b_1}_{=0} I_y + b_2 I_y + b_3 I_{xy} \right) \right) =$$

$$= - a_2 I_y - \underbrace{(a_2 + b_2)}_{=0} I_{xy} - b_3 z I_y = I_y (a_2 + z b_3)$$

Concludendo:

$G_z = a_1 + a_2 x + a_3 y - z(b_1 + b_2 x + b_3 y) = a + x(a_2 - z b_2) + y(a_3 - z b_3)$
 è la soluzione esatta del problema di DSV, che presenta:

$$a = N/A$$

$$-\frac{M_y}{I_y} = a_2 - z b_2$$

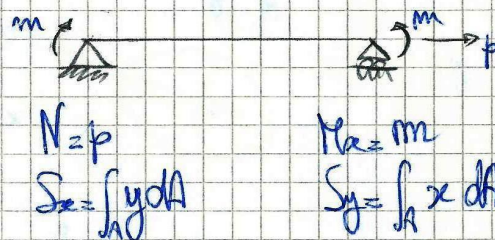
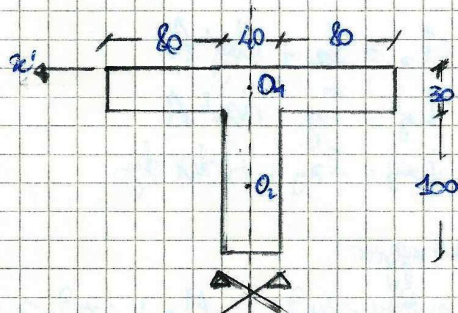
$$\frac{M_x}{I_x} = a_3 - z b_3$$

Allora:

$$G_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

Valore solo con assi x e y baricentrici e principali d'inerzia. $-\frac{M_y}{I_y}$ è la formula binomiale di G_z , $\frac{M_x}{I_x}$ è quella di Navier.

Ecco un esempio:



$y_1 = y$ (anche principale, avendo la simmetria)

Per definizione il baricentro ha coordinate:

$$x_{G0} = \frac{S_x}{A}$$

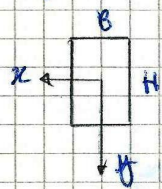
$$y_{G0} = \frac{S_y}{A}$$

Ecco una tabella in cui calcoliamo le grandezze necessarie!

	A	y_{Gi}	S_{xi} [mm ³]
1	200 · 30	15	6000 · 15 = 90000
2	400 · 40	80	1600 · 80 = 128000

$$\Rightarrow y_{G0} = \frac{90000 + 128000}{40000} = 4.1$$

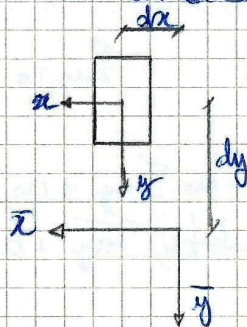
Per la scelta degli assi $x_0=0$. Quindi il baricentro ha coordinate $(0, 41)$. Per ottenere I_x e I_y riferiti agli assi baricentrici principali d'inerzia dobbiamo usare le formule del trasporto prese a prestito dalla Meccanica Razionale:



$$I_x = \int_A y^2 dA = \frac{1}{12} BH^3$$

$$I_y = \int_A x^2 dA = \frac{1}{12} HB^3$$

$$I_x, I_y > 0$$



$$I_{\bar{x}} = I_x + A dy^2$$

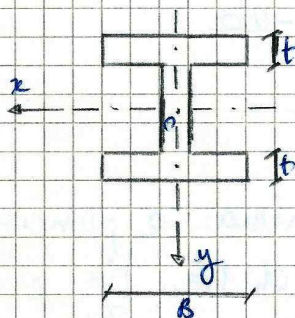
$$I_{\bar{y}} = I_y + A dx^2$$

Quindi otteniamo:

$$I_x = I_{x_1} + I_{x_2} = \frac{1}{12} \cdot 200 \cdot 30^3 + 6000 \cdot 26^2 + \frac{1}{12} \cdot 40 \cdot 100^3 + 4000 \cdot 39^2 = 1,392 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

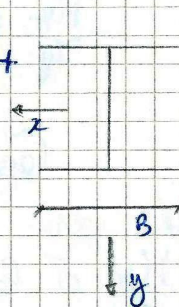
$$I_y = I_{y_1} + I_{y_2} = \frac{1}{12} \cdot 30 \cdot 200^3 + \frac{1}{12} \cdot 100 \cdot 40^3 = 2,053 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

Andiamo al confronto tra corpo sottile e non sottile per una trave HB a doppia simmetria:



$$I_x = 2 \left[\frac{1}{12} b t^3 + b t \left(\frac{H-t}{2} - \frac{t}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{12} t (H-2t)^3$$

$$I_y = 2 \left[\frac{1}{12} B^3 t \right] + \frac{1}{12} (H-2t) t^3$$



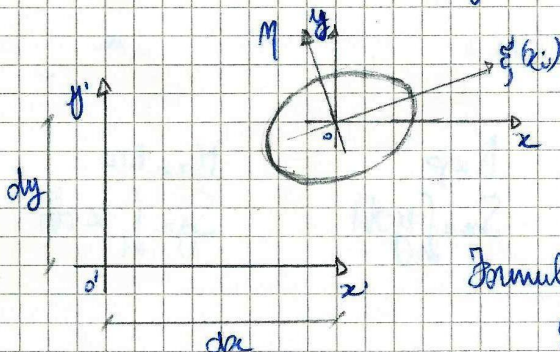
$$I_x = 2 B t \left(\frac{H}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} t H^3$$

$$I_y = 2 \cdot \frac{1}{12} t B^3$$

$$t \ll BH$$

Si baseranno a termini con ordine 2 o superiore.

Se ne abbiamo la rotazione tra gli assi



$$I_{x'} = I_x + A dy^2$$

$$I_{y'} = I_y + A dx^2$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} + A dx dy$$

Formule di passaggio:

$$\xi = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$\eta = y \cos \theta - x \sin \theta$$

Se hanno:

$$I_{\xi} = \int_A \eta^2 dA = \int_A (y^2 \cos^2 \theta + x^2 \sin^2 \theta - 2xy \cos \theta \sin \theta) dA = I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$I_{\eta} = \int_A \xi^2 dA = \int_A (y^2 \sin^2 \theta + x^2 \cos^2 \theta + 2xy \cos \theta \sin \theta) dA = I_x \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta + 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$I_{\xi\eta} = \int_A \xi\eta \, dA = \int_A (xy \cos\theta - x \cos\theta \sin\theta + y \cos\theta \sin\theta - xy \sin\theta) \, dA =$$

$$= I_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (I_x - I_y) \sin\theta \cos\theta$$

In mancanza di simmetrie si usano:

$$J = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix}$$

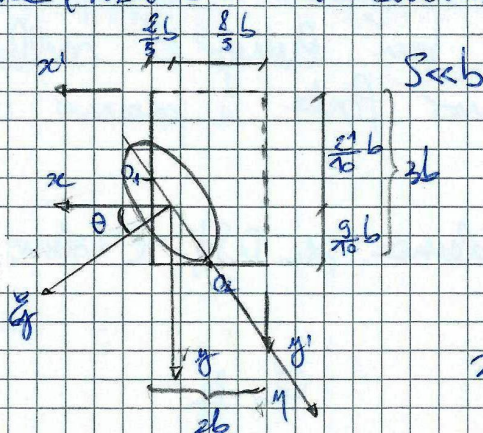
$$I_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow I_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (I_x - I_y) \sin\theta \cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow I_{xy} \cos 2\theta + (I_x - I_y) \frac{\sin 2\theta}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \text{tg } 2\theta = \frac{(I_x - I_y)}{2 I_{xy}} = -I_{xy} \Rightarrow \text{tg } \theta = \frac{I_{xy}}{I_y - I_x}$$

geometria delle aree

Ecco un esercizio che ci aiuta a ripassare la geometria delle aree usando una sezione senza assi di simmetria (rispetto a ξ con lati diseguali):



	A_i	x_{ci}	y_{ci}	S_{xi}	S_{yi}
1	$3b^2$	$2b$	$\frac{3b}{2}$	$\frac{3b^2}{2}$	$6b^2$
2	$2b^2$	b	$3b$	$6b^2$	$2b^2$
	<u>$5b^2$</u>			<u>$21b^2$</u>	<u>$8b^2$</u>

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{8b^2}{5b^2} = \frac{8b}{5} \quad y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{21b^2}{5b^2} = \frac{21b}{5}$$

Con le formule di trasporto:

$$I_x = I_{x_1} + I_{x_2} = \frac{1}{12} S(3b)^2 + 3b^2 \left(\frac{6b}{10} \right)^2 + 2b^2 \left(\frac{9b}{10} \right)^2 = \left(\frac{27}{12} + \frac{108}{100} + \frac{162}{100} \right) b^3 =$$

$$= \left(\frac{9}{4} + \frac{27}{25} + \frac{81}{50} \right) b^3 = \frac{225 + 108 + 162}{100} b^3 = \frac{495}{100} b^3 = \frac{99}{20} b^3$$

$$I_y = I_{y_1} + I_{y_2} = \frac{1}{12} (2b)^2 S + 3b^2 \left(\frac{2b}{5} \right)^2 + 2b^2 \left(\frac{3b}{5} \right)^2 = \left(\frac{8}{3} + \frac{12}{25} + \frac{18}{25} \right) b^3 =$$

$$= \frac{80 + 36 + 54}{75} b^3 = \frac{160}{75} b^3 = \frac{32}{15} b^3$$

$$I_{xy} = I_{xy_1} + A x_c y_c \Rightarrow I_{xy} = 3b^2 \cdot \frac{8b}{5} \cdot \left(\frac{6b}{10} \right) + 2b^2 \cdot \left(\frac{3b}{5} \right) \cdot \left(\frac{9b}{10} \right) =$$

$$= \left(\frac{36}{50} + \frac{54}{50} \right) b^3 = -\frac{9}{5} b^3$$

$$\Rightarrow \text{tg } 2\theta = \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{-\frac{9}{5} b^3 \cdot 2}{\left(\frac{32}{15} - \frac{99}{20} \right) b^3} = -\frac{3 \cdot 2 \left(\frac{112 - 297}{60} \right)}{18} = \frac{18}{185} = \frac{6}{185}$$

$$\Rightarrow 2\theta = \arctan \frac{216}{185} = 49,42^\circ \Rightarrow \theta = 24,7^\circ$$

Allora:

$$I_{\xi,\eta} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{99}{20} + \frac{32}{15} \right) b^3 \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{99}{20} - \frac{32}{15} \right)^2 + \frac{81}{25} b^3}$$

$$= \frac{409}{120} b^3 \pm \sqrt{\frac{34225}{14400} + \frac{81}{25} b^3} = \frac{409}{120} b^3 \pm \sqrt{\frac{1369}{576} + \frac{81}{25} b^3}$$

$$= \frac{409}{120} b^3 \pm \sqrt{\frac{3 \cdot 225 + 46656}{14400}} b^3 = \frac{1}{120} (409 \pm \sqrt{80881}) b^3$$

$$\Rightarrow I_{\xi} = 5,7783 b^3 \quad I_{\eta} = 1,0384 b^3$$

Abbiamo reperito i valori di massimo e minimo tra i momenti d'inerzia baricentrici ($I_G = \frac{N}{A} + \frac{M_z^2}{I_z} - \frac{M_y^2}{I_y}$)

Tracciamo sul disegno gli assi E_y e E_z e l'ellisse centrale d'inerzia della sezione, cioè l'ellisse con centro nel baricentro e semiasse:

$$\rho_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \quad \rho_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

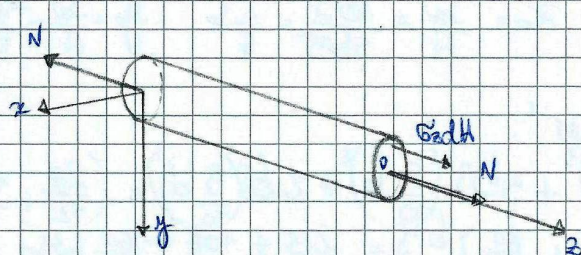
Sono i raggi principali d'inerzia. L'ellisse ha equazione:

$$\frac{E_y^2}{\rho_y^2} + \frac{E_z^2}{\rho_z^2} = 1$$

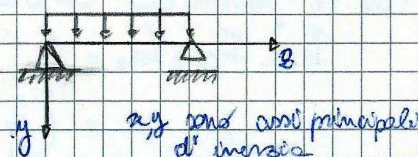
Tale ellisse è un cerchio se $I_z = I_y$, come nel caso del quadrato. L'ellisse serve a sintetizzare le proprietà geometriche della sezione: il suo asse più lungo è nella direzione di inerzia minima (piano forte e piano debole).

Estensione uniforme

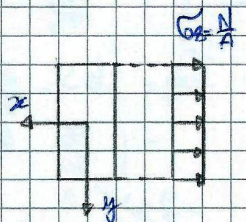
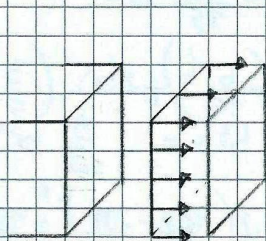
Prendiamo il primo passo del problema di DSF, l'estensione u_z uniforme:



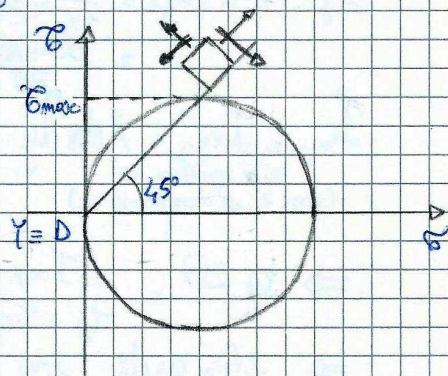
$$G_G = \frac{N}{A}$$



Schematicamente e col cerchio di Mohr



Rappresentazione con vettoriale sul piano



Si hanno:

$$y = 0 \quad z = 0$$

$$y_{yz} = y_{zy} = y_{xy} = 0$$

$$E_z = \frac{N}{EA}$$

$$E_x = E_y = -\sqrt{\frac{N}{EA}}$$

$$E_z = u_{,z}$$

$$E_y = v_{,y}$$

$$E_x = w_{,x}$$

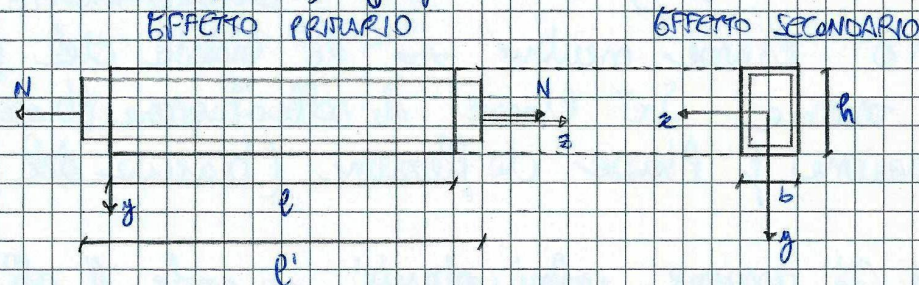
(spostamenti derivati)

Si ottiene, integrando:

$$\begin{cases} u = -\nu \frac{N}{EA} x + u_0(y, z) \\ v = -\nu \frac{N}{EA} y + v_0(x, z) \\ w = -\nu \frac{N}{EA} z + w_0(x, y) \end{cases}$$

Le costanti rappresentano i modi rigidi infinitesimi che si trascurano

La trasformazione del cilindro è omotetica (variazioni di volume, ma non di forma). Graficamente:



$$\Delta l = l' - l = w(l) - w(0) = \frac{Nl}{EA} = \epsilon_z l$$

$$\begin{aligned} \Delta b &= b' - b = -\nu \frac{N}{EA} b \\ \Delta h &= h' - h = -\nu \frac{N}{EA} h \end{aligned}$$

Densità di energia potenziale elastica ed energia potenziale elastica sono:

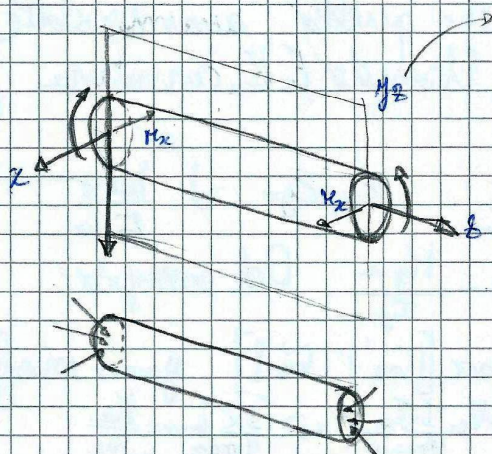
$$e(\epsilon) = \frac{1}{2} \sigma \epsilon = \frac{1}{2} E \epsilon = \frac{1}{2} E \epsilon^2 = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA^2}$$

$$U = \int_V e(\epsilon) dV = \frac{1}{2} E \epsilon^2 A \cdot l = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA^2} A l = \frac{N^2 l}{2EA} = \frac{1}{2} N \frac{Nl}{EA} = \frac{1}{2} N \Delta l$$

L'ultima espressione rappresenta il teorema di Clapeyron. Esempi tecnici in cui $\sigma_z = \frac{N}{A}$ sono aste nelle traviature reticolari, elementi precompressi, ecc.

Flessione uniforme

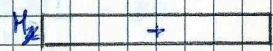
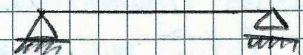
Il secondo punto del problema SV è la flessione uniforme:



Il piano di sollecitazione o piano di flessione

La flessione è rettilinea e avviene nello stesso piano in cui agisce il momento

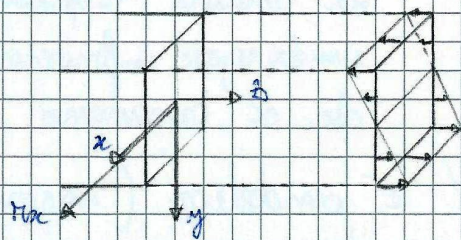
Il c.c. è lo M_x il piano di flessione è xz



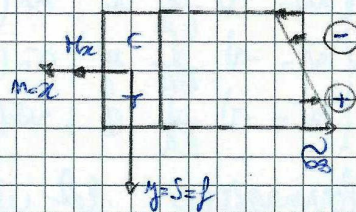
Soluzione $\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y, I_{xz} = 0$

Questa volta abbiamo il continuo, a destra il modello della trave piano rettilinea del primo modulo.

Elementarmente:



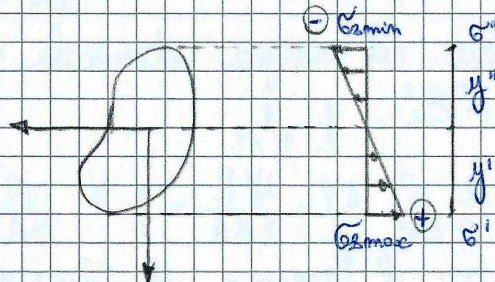
3-D



CONVENZIONALMENTE

In cui m è l'asse neutro, cioè la brace del primo momento sulla sezione. S è l'asse di sollecitazione (brace del primo di sollecitazione), f l'asse di flessione (brace del primo di flessione).

La tensione σ_z assume valori costanti su corde // all'asse m . σ_{max} e σ_{min} si trovano sulle parallele a m più distanti dal baricentro. Sono parallele alle tangenti ai lembi della flessione:



$$\sigma'' = \frac{M_x y''}{I_x}$$

$$\sigma' = \frac{M_x y'}{I_x}$$

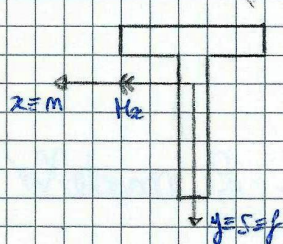
Il modulo di resistenza è:

$$W_z := \frac{I_x}{\max(|y'|, |y''|)} \quad [L^3], \text{ minimo tra } W_z \text{ e } W_{z''} \text{ in modulo}$$

Si ha $|\sigma_z|_{max} = \frac{M_x}{W_z}$, cioè dalla conoscenza di M_x si ottiene il massimo valore assoluto di σ_z . Il valore della tensione deve essere inferiore a quello ammissibile per un certo materiale: $\sigma_{max} \leq \sigma_{amm}$. Usando E ϵ_x curvatura flessionale e σ_{I_x} rigidità flessionale:

$$\sigma_z = \frac{M_x y}{I_x} \leadsto \epsilon_x = \frac{M_x y}{E I_x} \quad \epsilon_x, \epsilon_y = -\nu \frac{M_x y}{E I_x}$$

Alternativamente abbiamo $\sigma_z = -\frac{M_y x}{I_y}$. Ad esempio:

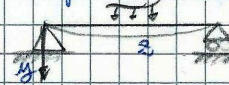
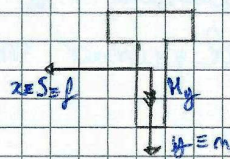


$$(\sigma_z)_{max} = \max[|\sigma_z'|, |\sigma_z''|] \quad y_{max} = \max[|y'|, |y''|]$$

$$W_y = \frac{I_x}{y_{max}} \Rightarrow (\sigma_z)_{max} = \frac{M_x}{W_z}$$

x coincide con m e y con S e f . L'opposto si ha se:

Se la brace y_z è piano ma di sollecitazione, ne che di flessione!



44
 Sempre per la flessione uniforme, vediamo il campo di spostamento partendo dal legame:

$G_z = \frac{M_x y}{I_x} \Rightarrow \epsilon_z = \frac{M_x}{E I_x} y$ con $X_x = \frac{M_x}{E I_x}$
 X_x è la curvatura flessionale nel piano y/z di asse
 vettore x . Abbiamo:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \epsilon_z = -\nu \frac{M_x y}{E I_x} = -\nu X_x y$$

Ricordando che:

$$\epsilon_x = u_{,x} = -\nu X_x y \quad \epsilon_y = v_{,y} = -\nu X_x y \quad \epsilon_z = w_{,z} = X_x y$$

Integrando le tre equazioni:

$$\begin{cases} u = -\nu X_x xy + f(y, z) \\ v = -\nu X_x \frac{y^2}{2} + g(x, z) \\ w = X_x yz + h(x, y) \end{cases} \quad \text{Sostituiamo in DSV:} \quad \begin{cases} v_{,xy} = u_{,y} + v_{,yx} = 0 \\ f_{,yz} = v_{,z} + w_{,y} = 0 \\ f_{,xz} = u_{,z} + w_{,x} = 0 \end{cases}$$

6 è assente. Eseguiamo la riduzione:

$$\begin{cases} f_{,yz} - \nu X_x x + g_{,x} = 0 \\ g_{,z} + h_{,y} + X_x z = 0 \\ f_{,xz} + h_{,z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{,yz} + g_{,x} = \nu X_x x \\ g_{,z} + h_{,y} = -X_x z \\ f_{,z} + h_{,x} = 0 \end{cases}$$

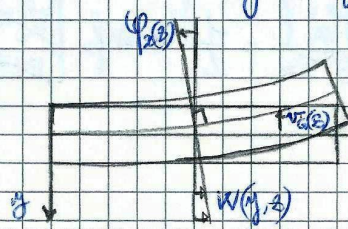
Prendiamo la soluzione del sistema come somma di una soluzione omogenea più una particolare. Trascuriamo l'omogenea poiché riguarda lo spostamento rigido e cerchiamo $f, h = 0$:

$$\begin{cases} g_{,x} = \nu X_x x \\ g_{,z} = -X_x z \\ f = 0 \quad h = 0 \end{cases} \Rightarrow g(x, z) = \frac{1}{2} X_x (\nu x^2 - z^2) \\ f = 0 \quad h = 0$$

Il teorema di Kirchhoff garantisce l'unicità della soluzione, quindi la soluzione è quella trovata:

$$\begin{cases} u = \nu X_x xy \\ v = -\frac{1}{2} X_x z^2 + \frac{\nu}{2} X_x (x^2 - y^2) \\ w = X_x yz \end{cases}$$

Ad a meno di spostamenti rigidi, ν è il coefficiente di Poisson, che vale tra 0,1 ÷ 0,3 e compare solo in u e v . Comparsa in $\nu X_x xy$ e $\frac{\nu}{2} X_x (x^2 - y^2)$: sono i termini della seconda u e compaiono nel piano xy . Quelli principali sono $-\frac{1}{2} X_x z^2$ e $X_x yz$. Graficamente il campo principale è:



$$\sigma_{xx} = -X_{xx} \frac{z^2}{2}$$

Finata la sezione, σ_{xx} è lineare con y .

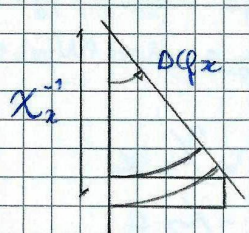
Sono presenti due contributi:

- flessione v (secondary) uguale per tutti i punti appartenenti alla sezione (quindi identificabile come spostamento della linea d'asse);
- rotazione rigida intorno all'asse (φ_x) delle sezioni trasversali. Essendo $y=0$ le sezioni restano rigidamente mantenute, dove ortogonali alla linea d'asse;

$$\text{tg } \varphi_x \approx \varphi_x = \chi_x \cdot z$$

Vediamo la rotazione relativa tra le due estremità del cilindro:

$$\Delta \varphi_x = \varphi_x(l) - \varphi_x(0) = \chi_x l = \frac{M_x}{EI_x} l$$

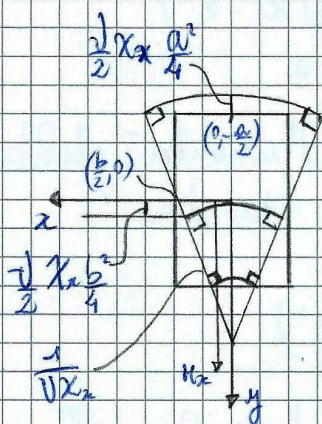


χ_x è il raggio di curvatura

Linea elastica: $v_G = -\chi_x \frac{z^2}{2} \Rightarrow \chi_x = -v_G''(z)$
 $\Rightarrow$ flessione uniforme $v'' = -\frac{M_x}{EI_x}$ (EB)

La deformazione segue dunque un arco di parabola. Poiché $|v_G| \ll 1$ (gradienti di spostamento piccoli) lo confonderemo con un arco di circonferenza.

Passiamo al campo di spostamenti secondari usando per semplificarci la sezione rettangolare:



$$y_{xy} = 0$$

$\frac{1}{\chi_x}$ è il raggio di curvatura trasversale, molto maggiore della curvatura della linea d'asse.

Si trovano anche qui parabole che approssimano archi di circonferenza. Lo spostamento secondario si trascurerà nella curvatura della trave. L'energia di deformazione è, considerando la sua densità:

$$e(\bar{\epsilon}) = \frac{1}{2} G \bar{\epsilon}^2 = \frac{1}{2} E \bar{\epsilon}^2 = \frac{1}{2} E \left(\frac{M_x y}{EI_x} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{M_x^2 y^2}{EI_x^2}$$

L'energia potenziale elastica è:

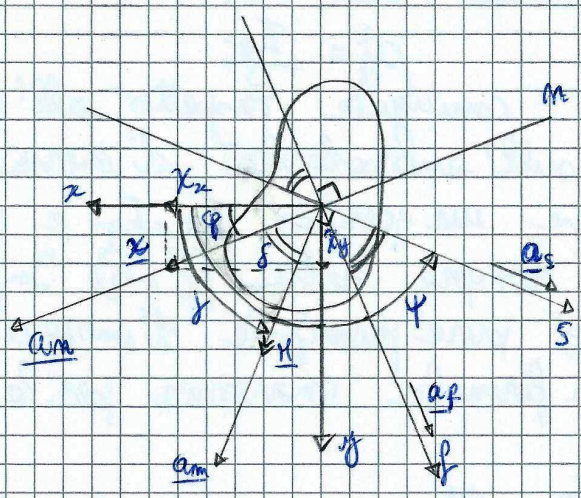
$$\bar{U} = \int_V e \, dV = \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{EI_x^2} \int_0^l dz \int_A y^2 \, dA = \frac{1}{2} \frac{M_x^2 l}{EI_x} = \frac{1}{2} M_x \Delta \varphi_x \left[\frac{EI_x}{EI_x^2} \right] = [L]$$

Flessione Compatta

Consideriamo il vettore curvatura $\underline{\chi}$ e il vettore momento $\underline{H}$:
 $\underline{\chi} = (\chi_x, \chi_y) = \left(\frac{1}{E I_x}, \frac{1}{E I_y} \right)$ $\underline{H} = (H_x, H_y)$
 In generale i due vettori $\underline{\chi}$ e $\underline{H}$ non sono collineari perché $I_x \neq I_y$ si può scrivere:

$$\underline{H} = H_x \underline{a}_x + H_y \underline{a}_y \quad \underline{\chi} = \chi_x \underline{a}_x + \chi_y \underline{a}_y$$

Consideriamo una sezione generica compatta:



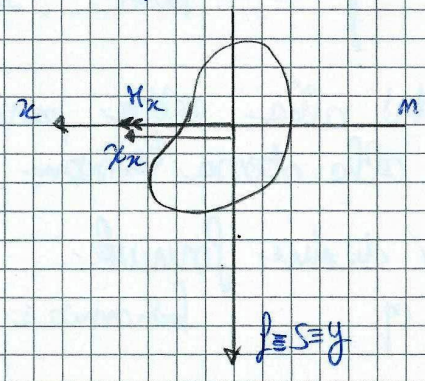
$$C_s = \frac{N}{A} + \frac{H_x y_c}{I_x} - \frac{H_y x_c}{I_y}$$

$$\Rightarrow C_s = E (\chi_x y_c - \chi_y x_c)$$

Per l'asse neutro n che $C_s = 0$:
 $n: y \chi_x - \chi_y x = 0 \Rightarrow y = \frac{\chi_y}{\chi_x} x$
 $\Rightarrow y = \frac{H_y}{H_x} \cdot \frac{I_x}{I_y} x$

Dato che $\tan \phi = \frac{\chi_y}{\chi_x}$ l'asse neutro è proprio $\underline{\chi}$ e l'asse

di flessione perpendicolare a n , δ è l'asse di sollecitazione ortogonale a $\underline{H}$. L'asse su cui giace $\underline{H}$ è l'asse momento. La flessione è deviata se l'asse neutro non è collineare con l'asse momento oppure quando il piano di flessione non coincide con quello di sollecitazione. Il carico è diretto secondo un'asse non principale, quindi la flessione è su un piano diverso. δ è l'angolo di deviazione. La flessione uniforme è il caso particolare usato per la trave piano rettilinea:



Ritornando al disegno iniziale possiamo anche scrivere:
 $n: y = \tan \phi x \Rightarrow \tan \phi = \frac{H_y}{H_x} \cdot \frac{I_x}{I_y}$ (per confronto con $y = \frac{H_y}{H_x} \cdot \frac{I_x}{I_y} x$)
 Ma $\frac{H_y}{H_x} = \tan \gamma$, quindi:
 $\tan \phi = \frac{I_x}{I_y} \tan \gamma$

Esiste dunque corrispondenza biunivoca tra asse neutro e asse momento. Detti $\underline{M} = (M_x, M_y)$, $M_x = M \cos \varphi$ e $M_y = M \sin \varphi$, si ha:

$$\varphi = \varphi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Allora:

$$\frac{dy}{dx} \frac{dy}{dx} = -\frac{I_x}{I_y} = -\frac{\rho_x^2}{\rho_y^2}$$

È la relazione tra asse neutro e asse di sollecitazione, in cui ρ_x e ρ_y sono raggi principali d'inertia tali che:

$$\rho_x^2 = \frac{I_x}{A}$$

$$\rho_y^2 = \frac{I_y}{A}$$

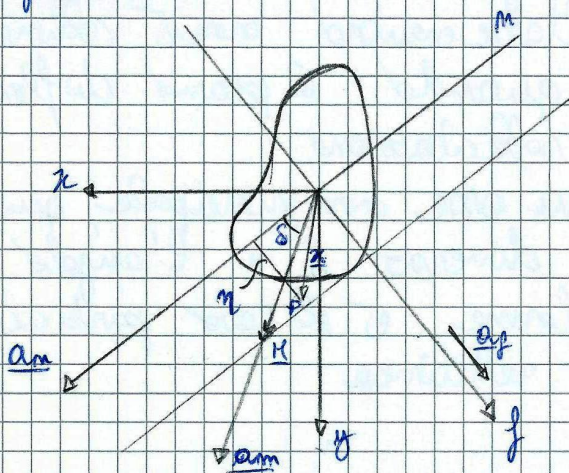
Gli assi m e s sono direzioni coniugate rispetto all'ellisse centrale d'inertia (centro sull'autoportata d'inertia).

Per il quadrato l'ellisse diventa un cerchio, $I_x = I_y$ e quindi $\alpha_m = \alpha_n$ sempre. La flessione è sempre retta ($\delta = 0$). Infatti qualunque asse baricentrico è pure principale d'inertia.

Si può anche ricavare una formula monomia per la flessione derivata:

$$\sigma_z = \frac{M_m}{I_m} \eta$$

Graficamente:



$$M_m := \underline{M} \cdot \underline{\alpha}_m = M \cos \delta$$

$$\eta := \underline{x} \cdot \underline{a}_p \quad \underline{x} := x \underline{a}_x + y \underline{a}_y$$

η è la distanza orientata di un generico punto p dall'asse neutro m .

Il momento d'inertia rispetto a m è $I_m = \int_A \eta^2 dA$.

Tutti i punti appartenenti alla retta parallela a m e passante per P sono soggetti alla stessa tensione.

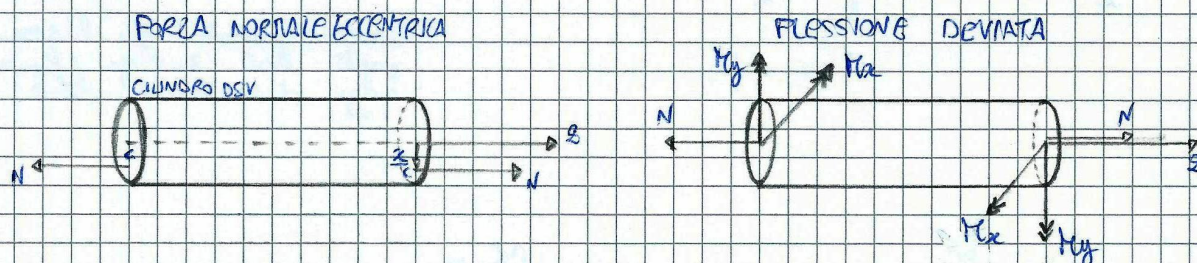
Concludendo disponiamo di due formule:

monomia $\sigma_z = \frac{M_m}{I_m} \eta$

binomia: $\sigma_z = \frac{M_y x}{I_x} - \frac{M_x y}{I_y}$

La forza normale eccentrica

Chiamiamo il punto C in cui è applicata la forza normale N che genera la flessione devianta. Forza normale eccentrica e flessione composta sono infatti strettamente equivalenti.



Dobbiamo introdurre N nella soluzione:

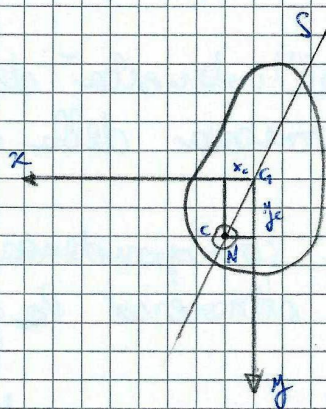
$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x y}{I_x} - \frac{M_y x}{I_y} \quad \text{ma } \frac{N}{A} \text{ non c'era}$$

troviamo l'asse neutro ponendo $\sigma_z = 0$:

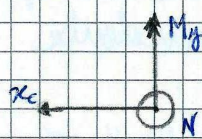
$$\left(\frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \right) \frac{I_x}{M_x} = 0 \Rightarrow y = \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_x}{I_y} x - \frac{N}{A} \cdot \frac{I_x}{M_x} = b_y \varphi x + p$$

L'asse neutro "nuovo" è parallelo a quello della flessione composta, $y = b_y \varphi x$.

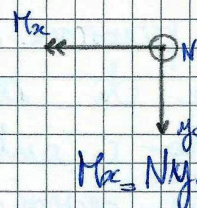
La forza applicata in C produce un momento $\underline{M} = (M_x, M_y)$ sul baricentro G:



$$C = (x_c, y_c)$$



$$M_y = -N x_c$$



$$M_x = N y_c$$

$$\Rightarrow \sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{N y_c}{I_x} y + \frac{N x_c}{I_y} x$$

$$\Rightarrow \sigma_z = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{y_c y}{p_x^2} + \frac{x_c x}{p_y^2} \right) \quad \text{con } p_x^2 = \frac{I_x}{A} \text{ e } p_y^2 = \frac{I_y}{A}$$

Abbiamo due espressioni dell'asse neutro:

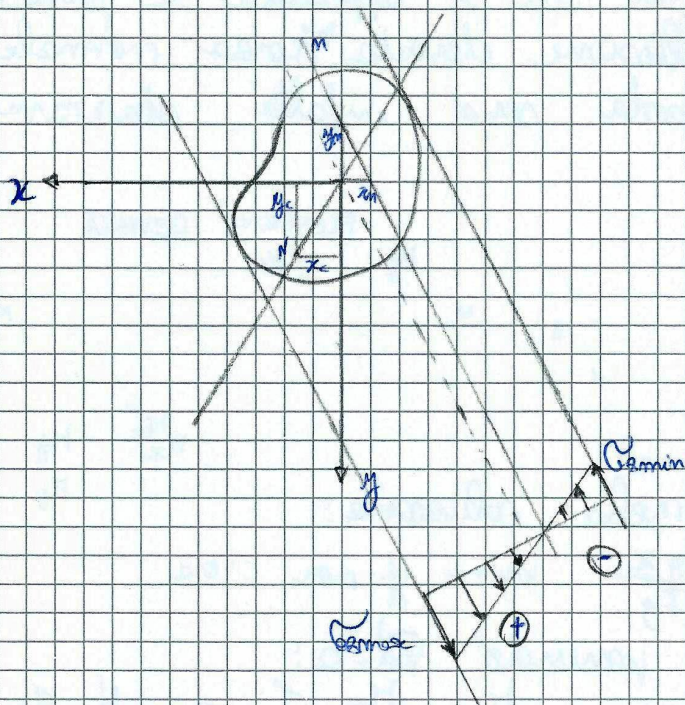
$$\frac{x x_c}{p_y^2} + \frac{y y_c}{p_x^2} + 1 = 0$$

$$y = \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_x}{I_y} x - \frac{N}{M_x} \cdot \frac{I_x}{A}$$

Per quanto riguarda la prima ($p_x^2 > 0, p_y^2 > 0, x_c > 0$ e $y_c > 0$):

$$y = -\frac{p_x^2}{y_c} - \frac{x x_c}{p_y^2} \cdot \frac{p_x^2}{y_c}$$

Graficamente e in forma segmentaria:



$$\frac{x}{x_m} + \frac{y}{y_m} = 1$$

$$\text{con } x_m = -\frac{p_x^2}{x_c} \quad \text{e} \quad y_m = -\frac{p_y^2}{y_c}$$

Sono i segmenti che l'asse m genera sugli assi x e y (funzione dei raggi d'incidenza e di C).

L'asse membro m relativo a C è definito come "antipolare" di C . Se $C \equiv 0 \Rightarrow m$ va all'infinito (estensione uniforme), se m baricentrico, $N \equiv 0 \Rightarrow C$ va all'infinito (flessione uniforme). La curva fondamentale legata all'asse membro è un'ellisse immaginaria, $\frac{x^2}{x_c^2} + \frac{y^2}{y_c^2} = -1$. Ciò che lega il tutto è la relazione $\tan \phi \tan \psi = -\frac{p_x}{p_y} = -\frac{p_x}{p_y}$. Ecco alcune proprietà:

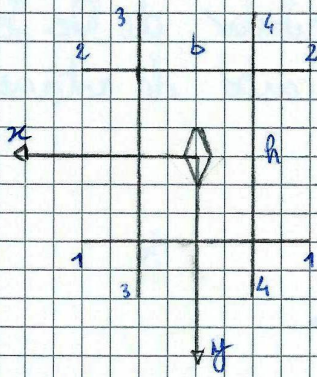
- l'equazione di m è indipendente dall'intensità delle sd, le aberrazioni, ma è dipendente dalla geometria della sezione e dalla posizione di C ;
- relazione di antipolarità: esiste una corrispondenza biunivoca tra C antipolo e m antipolare attraverso la geometria della sezione,
- m si trova sempre dalla parte opposta a C rispetto al baricentro e si avvicina a zero se C si allontana da esso (e viceversa).

Il moiré centrale d'immersione

47

Il moiré centrale d'immersione della sezione è il luogo degli asintoti delle rette m che non tagliano la sezione dell'cilindro. Tale luogo geometrico viene determinato usando le tangenti alla sezione.

Ad esempio per il rettangolo si considerano gli assi principali tangenti per determinare x e y cui essi sono asintoti. Congiungendo x e y si ottiene il moiré.



$$p_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{\frac{1}{12} b h^3}{b h} = \frac{h^2}{12} \quad p_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{1}{12} h b^3}{b h} = \frac{b^2}{12}$$

$$\frac{x}{x_m} + \frac{y}{y_m} = 1, \quad x_m = -\frac{p_y^2}{x_c}, \quad y_m = -\frac{p_x^2}{y_c}$$

- Sezione 1-1:

$$y = \text{cost} = \frac{h}{2} \quad x_m \rightarrow \infty, \quad x_c \rightarrow 0$$

$$\frac{y}{-p_x^2/y_c} = 1 \Rightarrow y = -\frac{p_x^2}{y_c} = -\frac{h}{2} \Rightarrow y_c = -\frac{p_x^2}{h/2} = -\frac{h}{6}$$

- Sezione 2-2:

$$y = -\frac{h}{2} \Rightarrow y = -\frac{p_x^2}{x_c} = -\frac{h}{2} \Rightarrow y_c = \frac{h}{6}$$

- Sezione 3-3:

$$x = \text{cost} = \frac{b}{2} \quad y_m \rightarrow \infty \quad y_c \rightarrow 0$$

$$\frac{x}{-p_y^2/x_c} = 1 \Rightarrow x = -\frac{p_y^2}{x_c} = \frac{b}{2} \Rightarrow x_c = -\frac{b}{6}$$

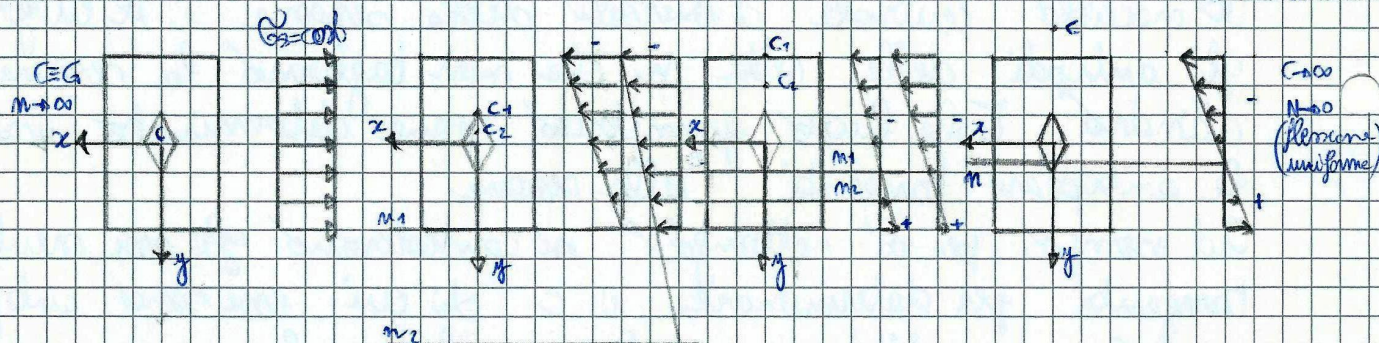
- Sezione 4-4:

$$x = -\frac{b}{2} \Rightarrow x = -\frac{p_y^2}{x_c} = -\frac{b}{2} \Rightarrow x_c = \frac{b}{6}$$

Proprietà del moiré:

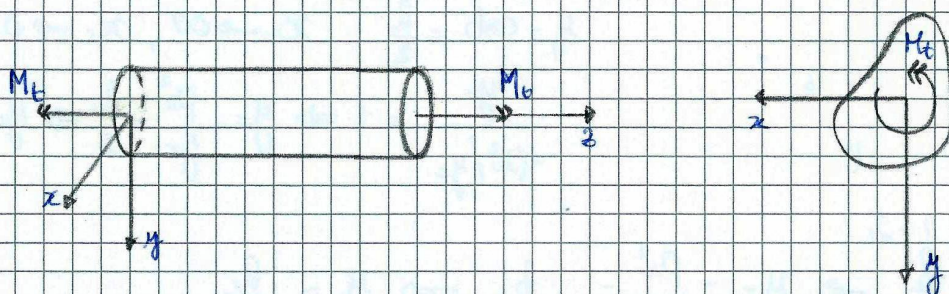
- il baricentro G appartiene sempre al moiré;
- se c è interno al moiré $\Rightarrow m$ esterno $\Rightarrow$ sezione non parzializzata, ma tutta di trazione o tutta di compressione;
- se c è esterno al moiré $\Rightarrow m$ è interno alla sezione (sezione parzializzata, tensione $\sigma > 0$ che < 0);
- se c è sulla frontiera del moiré $\Rightarrow m$ è tangente alla sezione;
- se c è sulla frontiera della sezione $\Rightarrow m$ è tangente al moiré della sezione.

Visualizzando graficamente bene quattro casi (più due) per il rettangolo:



La torsione uniforme

La torsione uniforme, fondamentale contributo di De Saint Venant alla scienza delle Costruzioni, tiene conto di rotazione e ingobbamento delle sezioni:



$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \text{con } \sigma_z = 0$$

La risultante delle forze sulle basi libere del cilindro equivale al solo M_z :

$$N=0 \quad M_z = M_y = 0 \quad T_x = T_y = 0$$

Usando l'approccio agli spostamenti (della congruenza all'equilibrio attraverso il legame), ipotizziamo un campo di spostamenti da cui dobbiamo verificare la congruenza (cioè che θ è costante):

$$\begin{aligned} u_x &= u = -\theta y z && \text{indipendente da } x \\ u_y &= v = \theta x z && \text{indipendente da } y \\ u_z &= w = \theta \psi(x, y) && \text{indipendente da } z \end{aligned}$$

ψ è la funzione di ingobbamento.

Applichiamo la congruenza:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = u_{,x} \\ \varepsilon_y = v_{,y} \\ \varepsilon_z = w_{,z} \\ \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} \\ \gamma_{yz} = v_{,z} + w_{,y} \\ \gamma_{zx} = w_{,x} + u_{,z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = 0 \\ \varepsilon_y = 0 \\ \varepsilon_z = 0 \\ \gamma_{xy} = -\Theta z + \Theta z = 0 \\ \gamma_{yz} = v_{,z} + w_{,y} \\ \gamma_{zx} = w_{,x} + u_{,z} \end{cases}$$

Vediamo le ultime due equazioni!

$$\begin{cases} \gamma_{yz} = \Theta x + \Theta \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \gamma_{zx} = \Theta \frac{\partial \psi}{\partial x} - \Theta y \end{cases} \xrightarrow{\text{Applichiamo il legame}} \begin{cases} \tau_{yz} = G \gamma_{yz} = G \Theta \left(x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\ \tau_{zx} = G \gamma_{zx} = G \Theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \end{cases}$$

Applichiamo l'equilibrio

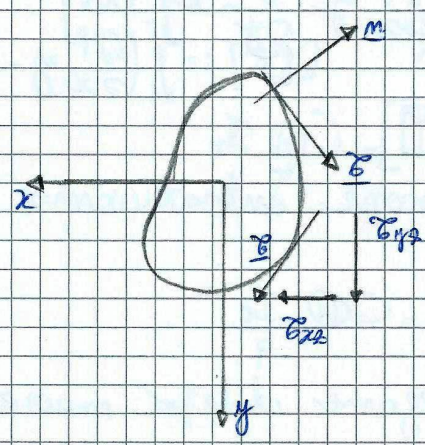
$$\sum_{j=x,y,z} \tau_{ij,j} + b_i = 0 \quad i=x,y,z \quad \begin{cases} \tau_{xx,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} = 0 \Rightarrow \tau_{xx} = \tau_{xx}(x,y) \\ \tau_{yx,x} + \tau_{yy,y} + \tau_{yz,z} = 0 \Rightarrow \tau_{yy} = \tau_{yy}(x,y) \\ \tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} + \tau_{zz,z} = 0 \end{cases}$$

Sostituiamo le derivate nella terza equazione:

$$G \Theta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \text{ in } V, \text{ ed applicando } \nabla^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Rightarrow \nabla^2 \psi = 0$$

La soluzione è unica. Sul contorno:



$$\begin{aligned} \bar{\sigma} \cdot n &= 0 \quad (\text{condizione al contorno del cilindro DSV}) \\ \Rightarrow \tau_{xx} n_x + \tau_{yz} n_y &= 0 \quad \text{su } \partial A \\ \Rightarrow G \Theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) n_x + G \Theta \left(x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) n_y &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} n_y &= y n_x - x n_y \end{aligned}$$

È la derivata direzionale di ψ rispetto a n normale uscente al contorno.

Nasce il problema di Dirichlet-Neumann:

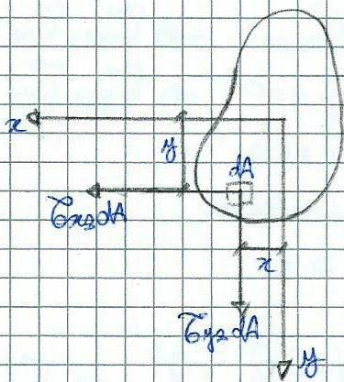
$$\nabla^2 \psi = 0 \text{ in } V \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = y n_x - x n_y \text{ su } \partial A$$

Come già sottolineato, $\psi(x,y)$ è la funzione di ingobbamento, $w = \Theta \psi(x,y)$. Con flessione uniforme le sezioni restano piane, con torsione uniforme no (a parte nel caso di sezione circolare).

Borromio ricondurrà alle FGSRIP viste nel primo modulo:

$$\begin{cases} u = -\Theta y \\ v = \Theta x \end{cases} \quad \text{e } \Theta(2) \oplus 2 \Rightarrow \begin{cases} u = -\Theta y \\ v = \Theta x \end{cases}$$

Θ è borromio φ , più precisamente, curvatura borromiale [1]. In $\Theta(2) \oplus 2$ rappresenta la rotazione relativa tra due sezioni a distanza unitaria. Se non è costante la borromio non è uniforme. La soluzione Primi-Meumann esiste in forme chiuse solo per figure quali cerchi, ellipse, triangolo equilatero. In generale è approssimata con serie numeriche o altri metodi. Imporremo l'equivalenza statica per esprimere Θ :



$$\begin{aligned} T_x &= \int_A \sigma_{xx} dA \int_A dF_x = 0 & T_y &= \int_A \sigma_{yy} dA \int_A dF_y = 0 \\ M_b &= \int_A (\sigma_{yx} x - \sigma_{xy} y) dA \end{aligned}$$

Usiamo le espressioni di σ_{yx} e σ_{xy} precedentemente trovate:

$$M_b = G \Theta \int_A \left[\frac{\partial \Psi}{\partial y} x + x^2 - \frac{\partial \Psi}{\partial x} y - y^2 \right] dA$$

$$\text{Definiamo } I_p = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y \text{ momento d'inerzia polare della sezione.}$$

$$M_b = G \Theta \left[I_p - \int_A \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} y - \frac{\partial \Psi}{\partial y} x \right) dA \right]$$

Definiamo integrale di Dirichlet $D[\Psi] = \int_A \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} y - \frac{\partial \Psi}{\partial y} x \right) dA$

$$M_b = G \Theta [I_p - D[\Psi]] = G \Theta I_t$$

Con I_t inerzia torsionale della sezione. Introduciamo il fattore di borromio q adimensionale:

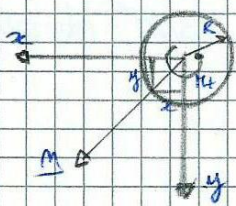
$$q = \frac{I_p}{I_p - D[\Psi]} \geq 1 \Rightarrow M_b = G \Theta I_t = G \Theta \frac{I_p}{q}$$

Abbiamo ottenuto l'equazione di legame di tipo macroscopico, analoga a:

$$M_x = E I_x \chi_x \quad \text{e} \quad M_y = E I_y \chi_y \quad \leadsto \quad M_b = G I_t \Theta$$

Allora $\Theta = \frac{M_b}{G I_t} = \frac{M_b q}{G I_p}$ con G [FL²] rigidezza borromiale.

Se la soluzione esiste per il cilindro circolare:



$$m_x = \frac{x}{R} \quad m_y = \frac{y}{R} \quad m_x^2 + m_y^2 = 1$$

$$\nabla \Psi = 0 \quad \frac{\partial \Psi}{\partial m} = y \frac{x}{R} - x \frac{y}{R} = 0$$

$$\Rightarrow \Psi = \text{costante}$$

Eliminiamo lo spostamento rigido in direzione z imponendo $u_z = 0$

$$\int_A \psi(x, y) dA = \int_A \Theta \psi(x, y) dA = 0$$

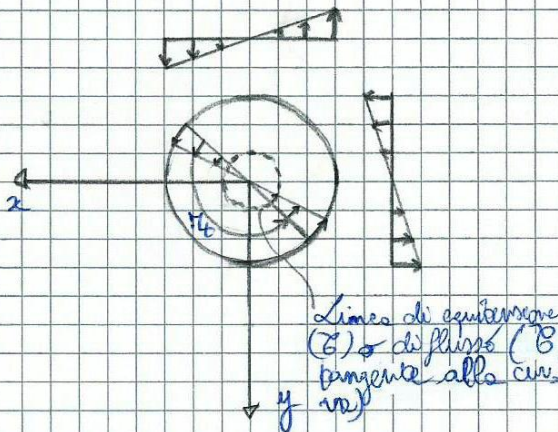
Mentre $\Theta \neq 0$ e $A \neq 0$, $\psi(x, y) = 0$. Quindi la sezione circolare è l'unica ad ingobbamento nullo e $I_t = I_p$. Inoltre:

$$q = \frac{I_p}{I_p - D[\psi]} \text{ con } D[\psi] = 0 \text{ se } \psi = 0$$

La sezione circolare piena non si ingobba ed è di massima rigidezza torsionale. Per gli spostamenti si ha:

$$\begin{cases} u = -\Theta y z \\ v = \Theta x z \\ w = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \tau_{xz} = G \Theta y \\ \tau_{yz} = G \Theta x \end{cases} \quad \Theta = \frac{M_t}{G I_p}, \quad I_p = \frac{\pi R^4}{2}$$

Le tensioni variano linearmente dal baricentro verso l'esterno:



$$\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = G \Theta \sqrt{x^2 + y^2} = G \Theta r$$

r distanza del generico punto dal baricentro, $0 \leq r \leq R$

La tensione è massima ai bordi e ivi tangente: $\tau \cdot n = 0$ su ∂A . Il campo è radiale e aumenta andando verso i

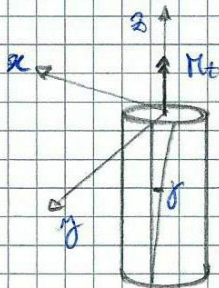
bordi. Sostituiamo $\Theta = \frac{M_t}{G I_p}$ in τ :

$$\tau = G \Theta r = G \frac{M_t}{G I_p} r = \frac{2 M_t}{\pi R^4} r$$

Se avessimo un anello circolare al posto del cerchio pieno:

$$I_p = \frac{\pi R_o^4}{2} - \frac{\pi R_i^4}{2}$$

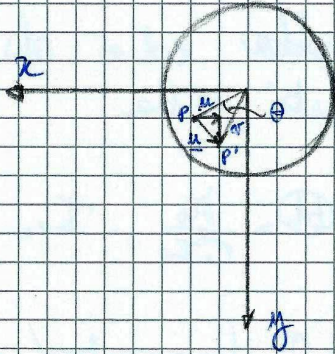
Vediamo cosa accade all'anello pieno del punto di vista di spostamenti e deformazioni:



Campo puro sul mantello:

$$\begin{array}{lll} \epsilon_x = 0 & \epsilon_y = 0 & \epsilon_z = 0 \\ \gamma_{xy} = 0 & \gamma_{xz} = \Theta y & \gamma_{yz} = \Theta x \\ (DSI) & \tau = G \Theta r & \end{array}$$

Completivamente $y = \Theta x$. Nel processo deformativo le fibre longitudinali e trasversali non subiscono variazioni di lunghezza. Le fibre longitudinali si dispongono secondo un'e_z che cilindrica approssimata ad una retta per spostamenti infinitesimi. Sul mambello si ha y massima per $x=R$.
Sulla sezione:



$$\begin{cases} u = -\Theta y \\ v = \Theta x \end{cases} \quad \Theta = \Theta z$$